Comparaison de Chaînes de Bellman par Couplage Croissant

L. Truffet[1]

Ecole des Mines de Nantes France
Laurent.Truffet@emn.fr

Abstract

Les chaînes de Bellman-Maslov-Quadrat constituent un exemple de système dynamique autonome sur semi-anneau idempotent fondamental pour l'optimisation.

Dans un premier temps nous étudions le couplage croissant de deux mesures idempotentes (i.e. à valeurs dans un semi-anneau idempotent). Ce couplage peut être vu comme une version idempotente du problème du tableau de contingence de Fréchet à trous. Mais nous le traitons comme un problème de transport de mesures idempotentes à la Monge-Kantorovitch-Hitchcock. La condition nécessaire et suffisante d'existence de couplage croissant est équivalente à la condition de forte dualité dans le problème de transport. Cette condition est la version idempotente de la dominance stochastique d'ordre un. Il s'agit d'un préordre sur les mesures idempotentes. Nous montrons que l'ensemble des probabilités idempotentes muni de ce préordre a une structure de type "treillis". Nous donnons les formules closes pour la borne supérieure et la borne inférieure de deux probabilités idempotentes.

Dans un deuxième temps nous caractérisons les opérateurs de Bellman monotones au sens de ce préordre. Pour un opérateur de Bellman donné nous construisons les opérateurs monotones optimaux bornants.

Dans un troisième temps, au titre des applications possibles, nous montrons comment étudier de grandes chaînes de Bellman en combinant monotonie et critère d'agrégation exacte de processus.

Les résultats de ce papier concernent la comparaison de marginales de dimension un de chaîne de Bellman mais l'intéret d'étudier ce couplage est qu'il permet de comparer des marginales de dimenison quelconque. Cet aspect n'est pas développé dans ce travail.

1 Introduction

Les systèmes linéaires autonomes sur semi-anneau constituent un exemple de systèmes simples mais ayant un fort potentiel pour la modélisation de systèmes complexes. Généralement, les questions que l'on se pose sur ce type de modèles amènent naturellement à des calculs sur le régime transitoire (cf. e.g. étude en sûreté de fonctionnement) et/ou à l'étude de condition d'existence du régime asymptotique et de son calcul effectif. Pour des systèmes fortement complexes la taille du modèle associé peut être très grande. Ce qui limite les possibilités de calcul. Afin d'améliorer les possibilités de calcul nous nous proposons de combiner :

- des techniques de calcul de bornes qui permettent de maîtriser l'erreur que l'on commet par majoration et minoration,
- des techniques de réduction de la taille des modèles.

Ces techniques (une partie seulement) sont étudiées dans le cas où l'addition est idempotente. Et le parallèle est fait avec le cas non-idempotent. C'est pourquoi dans cet article nous considérons le semi-anneau idempotent

$$\mathbb{B} := ([0, \infty], \oplus := \max, \times, 0, 1) \tag{1}$$

et le semi-anneau

$$\mathbb{M} := ([0, \infty], +, \times, 0, 1). \tag{2}$$

Sous l'hypothèse Markovienne les lois marginales, $\boldsymbol{x}(k)$, $k \geq 0$, de dimension un d'une chaîne de Markov à n états, $n \geq 1$, sont complètement définies par un système dynamique autonome linéaire dans $\mathbb{M}$ de la forme : $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(k)$. En rappelant que $b_{i,j}$ est la probabilité de passer de j à i en un pas de temps ($\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} = 1$, $\forall j$).

Par une démarche similaire mais dans $\mathbb{B}$ (ou tout semi-anneau isomoprhe à $\mathbb{B}$) les lois marginales, notées encore $\boldsymbol{x}(k)$, $k \geq 0$, de dimension un d'une chaîne de Bellman sont caractérisées par un système dynamique autonome linéaire dans $\mathbb{B}$ de la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(0) & = \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{x}(k+1) & = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x}(k), \end{cases} \tag{3}$$

où $(\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x})_i := \oplus_{j=1}^{n} b_{i,j} \times x_j$ désigne la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x}$. Et $b_{i,j}$ représente le coût marginal pour passer de j à i en un pas de temps ($\oplus_{i=1}^{n} b_{i,j} = 1$, $\forall j$). La matrice $\boldsymbol{B}$ est appelée noyau ou opérateur de Bellman. Ce type de modèle se rencontre entre autre (liste non exhaustive) dans les cas d'application suivants :

- Problème de calcul de chemin de poids le plus fort dans des grands graphes. La $j^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\boldsymbol{x}(k)$ s'interprète alors comme le poids maximum pour aller jusqu'au sommet j du graphe en empruntant des chemins de longueur k.

- Problème de contrôle de dynamique à temps discret avec coûts multiplicatifs dans le cas d'un horizon fini N, $N \geq 2$. Soit un système dynamique $z(t+1) = f(z(t), u(t))$, $t = 0, 1, \ldots N-1$. Nous cherchons à calculer le critère d'optimisation suivant :

  $$\max_{u(0),\ldots,u(N-1)} \Pi_{i=0}^{N-1} b(z(i), u(i)) \times \phi(z(N)).$$

  Où $b(z(i), u(i))$ est le coût marginal " à payer " par le système lorsqu'il est dans l'état $z(i)$ et que l'on décide de l'action $u(i)$. $\phi(z(N))$ est le coût marginal " à payer " par le système lorsqu'il est dans l'état $z(N)$. On peut supposer que ces coûts sont à valeurs dans $[0, 1]$.

  En posant pour tout $p < N-1$, pour tout $z(p) = z$:

  $$\boldsymbol{x}_z(p) = \max_{u(p),\ldots,u(N-1)} \Pi_{i=p}^{N-1} b(z(i), u(i)) \times \phi(x(N)).$$

  $\boldsymbol{x}_z(p)$ satisfait alors l'équation de programmation dynamique suivante :

  $$\boldsymbol{x}_z(p) = \max_{u} b(z, u) \times \boldsymbol{x}_{f(z,u)}(p+1), \boldsymbol{x}_z(N) = \phi(x).$$

En inversant le temps (i.e. en faisant un changement d'origine $k = N - p$) et en supposant que b est une fonction seulement de u, on retrouve une équation dynamique de la forme : $\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x}(k-1)$. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à e.g. [7].

- Suite d'itérés d'ensembles flous. En effet, le vecteur $\boldsymbol{x}(k)$ peut également s'interpréter comme un sous-ensemble flou de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. $\boldsymbol{x}_j(k)$ représente le degré d'appartenance de j à $\{1, \ldots, n\}$ à l'étape k. Ainsi, la matrice $\boldsymbol{B}$ (opérateur de Bellman) permet de passer d'un ensemble flou $\boldsymbol{x}(k)$ à un autre ensemble flou $\boldsymbol{x}(k+1)$. Pour de plus amples explications sur les ensembles flous nous renvoyons le lecteur à e.g. [2].

Pour l'encadrement de chaînes de Markov, le couplage croissant joue un rôle crucial. Dans la section 3, nous nous proposons donc d'étudier une version idempotente du couplage croissant (i.e. en se plaçant dans $\mathbb{B}$). La condition nécessaire et suffisante (CNS) d'existence de couplage croissant est obtenue dans le THEOREME 3.1. Cette CNS induit un préordre entre les vecteurs de probabilité idempotente. Dans le THEOREME 3.2 nous donnons l'expression des bornes inférieure et supérieure de deux vecteurs de probabilité idempotente.

L'encadrement des marginales de dimension un d'une chaîne de Bellman est abordé en section 4. Comme pour les chaînes de Markov les conditions suffisantes pour générer des encadrements sont (A) la monotonie d'opérateur de Bellman (caractérisée par le THEOREME 4.1) et (B) la comparaison des noyaux de Bellman (définie par (22)). Ce résultat fait l'objet du THEOREME 4.2. Pour générer des encadrements sur la dynamique agrégée d'une chaîne de Bellman nous introduisons une notion classique d'agrégation exacte de processus : l'agrégation forte. Le COROLLAIRE 4.1 fournit une manière explicite de construire un encadrement de la dynamique agrégée d'une chaîne de Bellman par des chaînes de Bellman de taille plus petite. Dans la sous-section 4.4 un exemple numérique est donné.

2 Préliminaires

La notation := ou $\stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow}$ signifie "est défini(e) par". Les lettres grasses désignent des vecteurs/matrices. Les autres lettres désignent des ensembles et des scalaires (éléménts a priori de $[0, \infty]$ ou $\mathbb{N}$).

A l'isomorphisme $x \mapsto \ln(x)$ près tous les résultats que nous rappelons dans ce qui suit de cette section sont déjà consignés dans e.g. [1].

La relation d'ordre naturel sur $\mathbb{B}$ est définie par :

$$a \leq b \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \exists c \in [0, \infty] : a \oplus c = b \Leftrightarrow a \oplus b = b.$$

Elle coïncide avec l'ordre naturel sur $\mathbb{M}$. $([0, \infty], \leq)$ a une structure de treillis complet distributif, en particulier pour tout $a, b, c \in [0, \infty]$:

$$a \oplus (b \wedge c) = (a \oplus b) \wedge (a \oplus c), \tag{4}$$

où $\wedge := \min$.

La multiplication $\times$ est supposée vérifier également $0 \times \infty = 0$ et $\forall a \neq 0$, $a \times \infty = \infty$. La division se définit comme suit :

$$\frac{b}{a} = b/a = a \backslash b := \oplus\{x : \ a \times x \leq b\}. \tag{5}$$

Il en découle que pour tout b : $\frac{b}{0} = \infty = \frac{\infty}{\infty}$.

Nous définissons la "soustraction" par :

$$a \ominus b := \wedge\{x : \; x \oplus b \geq a\} = \begin{cases} a & \text{si } b < a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

Elle vérifie entre autre pour tout $a, x \in [0, \infty]$:

$$(x \ominus a) \oplus a = x \oplus a. \tag{7}$$

Les relations/opérations précédentes sont naturellement étendues aux vecteurs/matrices comme suit :

$$\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B} \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall i, j : \; a_{i,j} \leq b_{i,j}, \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} := (a_{i,j} \oplus b_{i,j}), \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{A} \ominus \boldsymbol{B} := (a_{i,j} \ominus b_{i,j}), \tag{8c}$$

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} := (a_{i,j} \wedge b_{i,j}), \tag{8d}$$

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})_{i,j} := \oplus_k a_{i,k} \times b_{k,j} \tag{8e}$$

$$(\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B})_{i,j} := (\oplus\{\boldsymbol{X} : \; \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{B}\})_{i,j} = \underset{k}{\wedge} \, a_{k,i} \backslash b_{k,j} \tag{8f}$$

$$(\boldsymbol{D}/\boldsymbol{C})_{i,j} := (\oplus\{\boldsymbol{X} : \; \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{D}\})_{i,j} = \underset{l}{\wedge} \, d_{i,l}/c_{j,l} \tag{8g}$$

Enfin, notons le résultat utile suivant que nous énonçons sous forme de lemme sans démonstration.

LEMME 2.1. *Soient $\boldsymbol{C} \in \mathbb{B}^{n,m}$ et $\boldsymbol{d} \in \mathbb{B}^n$. Le système d'équation*

$$\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}$$

admet au moins une solution en $\boldsymbol{z}$ si et seulement si

$$\boldsymbol{C} \otimes (\boldsymbol{C} \backslash \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}.$$

3 Etude du couplage croissant

3.1 Définition

Nous présentons la version algébrique du couplage croissant. Soient $n \geq 1$, $S := \{1, \ldots, n\}$, $K := \{(i,j) \in S^2 : i > j\}$, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{B}^n$. On appelle mesure de couplage croissant toute matrice $\boldsymbol{X} \in \mathbb{B}^{n,n}$ qui vérifie :

$$\boldsymbol{X}(K) := \oplus_{(i,j) \in K} x_{i,j} = 0 \tag{9a}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{1} & = \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{1}^T \otimes \boldsymbol{X} & = \boldsymbol{q}^T \end{cases} \tag{9b}$$

Où $(\cdot)^T$ désigne l'opérateur transposée, $\boldsymbol{1} := \oplus_{i=1}^{n} \boldsymbol{\delta}_i$, $\boldsymbol{\delta}_i$ représente le $i^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Le problème est alors le suivant :

A quelle condition sur $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ existe t-il une matrice $\boldsymbol{X}$ solution de (9a)-(9b) ?

En remarquant que la condition (9a) est équivalente à

$$\forall (i,j) \in K, \ x_{i,j} = 0,$$

le problème précédent est la version idempotente du problème de Fréchet à trous [3].

3.2 Problème de transport

On introduit les vecteurs $\boldsymbol{b} \in \mathbb{B}^{2n}$ et $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^{n^2}$ avec $\boldsymbol{b}^T := (\boldsymbol{p}^T, \boldsymbol{q}^T)$, $\boldsymbol{c}^T := (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n}, c_{2,1}, \ldots, c_{n,n})$ où $c_{i,j} = 1$ si $i > j$, 0 sinon; $\boldsymbol{x}^T := (x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, x_{2,1}, \ldots, x_{n,n})$. La notation $x_{i,j}$ correspond donc à la $((i-1)n + j)^{\text{ième}}$ composante de $\boldsymbol{x}$.

Introduisons également la $2n \times n^2$-matrice

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}^T & \boldsymbol{0}^T & \cdots & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0}^T & \boldsymbol{1}^T & \cdots & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0}^T & \boldsymbol{0}^T & \cdots & \boldsymbol{1}^T \\ \boldsymbol{\delta}_1^T & \boldsymbol{\delta}_1^T & \cdots & \boldsymbol{\delta}_1^T \\ \boldsymbol{\delta}_2^T & \boldsymbol{\delta}_2^T & \cdots & \boldsymbol{\delta}_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_n^T & \boldsymbol{\delta}_n^T & \cdots & \boldsymbol{\delta}_n^T \end{pmatrix} \tag{10}$$

où $\boldsymbol{0}$ est le vecteur nul.

Le problème initial (9a)-(9b) est équivalent à résoudre $\boldsymbol{c}^T \otimes \boldsymbol{x} = 0$ sous la contrainte $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. A ce stade, nous pourrions appliquer le LEMME 2.1 pour résoudre notre problème. Mais, ce problème de couplage peut apparaitre comme un problème plus fondamental. En effet, on peut relâcher la contrainte $\boldsymbol{c}^T \otimes \boldsymbol{x} = 0$ en cherchant son minimum. Dans ce cas le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \min \boldsymbol{c}^T \otimes \boldsymbol{x} \\ \text{s.c : } \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \end{cases}$$

Il s'agit du problème fondamental de transport de Monge-Kantorovitch-Hitchcock (MKH) dans sa version idempotente. Pour plus de détails sur ce problème nous renvoyons le lecteur à e.g. [11]. Nous pouvons associer à MKH son problème dual :

$$\begin{cases} \max \boldsymbol{y}^T \otimes \boldsymbol{b} \\ \text{s.c : } \boldsymbol{y}^T \otimes \boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}^T. \end{cases}$$

Ce problème dual se résoud très simplement ici en remarquant que $\boldsymbol{y}^T \otimes \boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}^T \Leftrightarrow \boldsymbol{y}^T \leq \boldsymbol{c}^T / \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}^T$. Comme d'autre part $\boldsymbol{0}^T \leq \boldsymbol{y}^T$ on en déduit que $\max\{\boldsymbol{y}^T \otimes \boldsymbol{b}, \text{s.c } \boldsymbol{y}^T \otimes \boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}^T\} = 0$.

La condition de dualité forte pour le problème MKH est donc bien équivalente au problème de Fréchet à trous, i.e. trouver à quelle condition il existe $\boldsymbol{x}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{c}^T \otimes \boldsymbol{x} & = 0 \\ \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x} & = \boldsymbol{b}. \end{array} \right. \tag{11}$$

La théorie de la résiduation (cf. LEMME 2.1) nous permet d'écrire que le système (11) admet au moins une solution si et seulement si :

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{A} \end{array} \right) \otimes (\boldsymbol{c}^T \backslash 0 \wedge \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{array} \right) \tag{12}$$

Comme $\boldsymbol{0}^T \leq \boldsymbol{c}^T$ et $\boldsymbol{c}^T \backslash 0 \wedge \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}^T \backslash 0$, la condition $\boldsymbol{c}^T \otimes (\boldsymbol{c}^T \backslash 0 \wedge \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b}) = 0$ est toujours vraie. Donc (12) est équivalente à :

$$\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{c}^T \backslash 0 \wedge \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}, \tag{13}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{c}^T \backslash 0$, $\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}^T \backslash 0 \wedge \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b}$, éléments de $\mathbb{B}^{n^2}$, sont définis par :

$$(\boldsymbol{c}^T \backslash 0)_{i,j} = 0 \text{ si } i > j, \ \infty \text{ sinon} \tag{14a}$$

$$(\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b})_{i,j} = p_i \wedge q_j \tag{14b}$$

$$(\boldsymbol{c}^T \backslash 0 \wedge \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b})_{i,j} = 0 \text{ si } i > j, \ p_i \wedge q_j \text{ sinon.} \tag{14c}$$

En développant (13) nous obtenons le système d'équations suivant que doivent satisfaire $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (p_1 \wedge q_1) \oplus \cdots \oplus (p_1 \wedge q_n) & = p_1 \\ (p_2 \wedge q_2) \oplus \cdots \oplus (p_2 \wedge q_n) & = p_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_n \wedge q_n & = p_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_1 \wedge q_1 & = q_1 \\ (p_1 \wedge q_2) \oplus (p_2 \wedge q_2) & = q_2 \\ \vdots & \vdots \\ (p_1 \wedge q_n) \oplus \cdots \oplus (p_n \wedge q_n) & = q_n. \end{array} \right.$$

Par distributivité du treillis $([0, \infty], \leq)$ (cf. (4)), le système d'équations précédents se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_1 \wedge (q_1 \oplus \cdots \oplus q_n) & = p_1 \\ p_2 \wedge (q_2) \oplus \cdots \oplus q_n) & = p_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_n \wedge q_n & = p_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_1 \wedge q_1 & = q_1 \\ (p_1 \oplus p_2 \wedge q_2 & = q_2 \\ \vdots & \vdots \\ (p_1 \oplus \cdots \oplus p_n) \wedge q_n & = q_n. \end{array} \right.$$

En remarquant que $a \wedge b = a$ si et seulement si $a \leq b$ le théorème suivant est alors démontré.

THEOREME 3.1 (CNS de couplage croissant)**.** *Il existe un couplage croissant $\boldsymbol{X}$ de $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ si et seulement si*

$$\boldsymbol{p} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{q} \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{p} & \leq \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q} & \leq \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{p} \end{array} \right.$$

où la $n \times n$-matrice $\boldsymbol{K}_n$ est définie par :

$$\boldsymbol{K}_n := \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right). \tag{15}$$

La relation $\leq_{st}^{\oplus}$ est un préordre (i.e. réflexive par définition de la matrice $\boldsymbol{K}_n$, et transitive car $\boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{K}_n$).

Du fait que $\boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{K}_n$ et que $\boldsymbol{I} \leq \boldsymbol{K}_n, \boldsymbol{K}_n^T$ ($\boldsymbol{I}$ matrice identité) du théorème précédent on en déduit aisément que :

COROLLAIRE 3.1.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{p} & \leq \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q} & \leq \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{p} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{p} & \leq \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{q} & \leq \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{p} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q} & = \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{q} \oplus \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{p} & = \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{p} \end{array} \right.$$

Dans le cas du semi-anneau $\mathbb{M}$ et où $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ sont des vecteurs de probabilité (i.e. $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$) la condition du milieu s'écrit dans $\mathbb{M}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{p} & \leq \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{K}_n^T \boldsymbol{q} & \leq \boldsymbol{K}_n^T \boldsymbol{p}. \end{array} \right.$$

En remarquant que $\sum_{k=i}^n p_k = 1 - \sum_{k=1}^{k=i-1} p_k$, $i \geq 2$, la dernière condition est tout simplement équivalente à :

$$\boldsymbol{p} \leq_{st} \boldsymbol{q} \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{q} \tag{16}$$

qui est la condition de dominance stochastique d'ordre un ou d'ordre fort entre deux vecteurs de probabilité [6]. La relation $\leq_{st}$ est un ordre partiel sur l'ensemble des vecteurs de probabilité.

3.3 Borne supérieure et borne inférieure de deux vecteurs de probabilité idempotente

On appelle vecteur de probabilité idempotente de taille n tout vecteur $\boldsymbol{p} \in \mathbb{B}^n$ tel que $\oplus_{i=1}^n p_i = 1$. Soit $P(n)$ l'ensemble de tous ces vecteurs. Nous, nous proposons d'étudier de manière rapide la structure de $(P(n), \leq_{st}^{\oplus})$.

Nous énonçons le théorème suivant dont la démonstration se trouve en Appendice A.

THEOREME 3.2. *Soient $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ deux éléments de $P(n)$. Alors il existe une unique borne inféreure au sens de $\leq_{st}^{\oplus}$ de $\boldsymbol{p}$ et de $\boldsymbol{q}$ notée :*

$$\boldsymbol{p} \wedge_{st} \boldsymbol{q} := \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q} \tag{17}$$

et il existe une unique borne supérieure notée :

$$\boldsymbol{p} \vee_{st} \boldsymbol{q} := \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q} \ominus (\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{q}), \tag{18}$$

où la $n \times n$-matrice $\boldsymbol{M}_n$ est définie par :

$$\boldsymbol{M}_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

4 Quelques résultats de comparaison de chaînes de Bellman

Dans cette section nous montrons quelques applications possibles du préordre $\leq_{st}^{\oplus}$ qui nous permet de calculer des bornes sur les marginales de dimension un d'une chaîne de Bellman. Pour le lecteur familier avec la comprarison au sens de l'ordre stochastique fort de chaînes de Markov les similitudes de la démarche ci-après et des résultats sont frappantes. Les preuves des résultats suivants utilisent des arguments similaires (voire identiques) à celles qui se trouvent dans [10] et [5]. Elles ne sont donc pas toutes détaillées.

4.1 Opérateurs $\leq_{st}^{\oplus}$-monotones

Un opérateur/noyau de Bellman $\boldsymbol{B} \in \mathbb{B}^{n,n}$ (i.e. vérifiant $\oplus_{i=1}^{n} b_{i,j} = 1,\ \forall j$) est monotone si

$$\forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in P(n)\ \boldsymbol{p} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{p} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{q}.$$

Où nous rappelons que $P(n)$ désigne l'ensemble des vecteurs de probabilité idempotente à n composantes.

Nous caractérisons ces opérateurs monotones dans le théorème suivant.

THEOREME 4.1. *$\boldsymbol{B}$ est un opérateur de Bellman monotone si et seulement si*

$$\forall j = 1, \ldots n-1,\ \boldsymbol{B}(\cdot, j) \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B}(\cdot, j+1), \tag{20}$$

où $\boldsymbol{B}(\cdot, j)$ désigne la $j^{\text{ième}}$ colonne de $\boldsymbol{B}$.

Preuve. La preuve est similaire à celle de [10, Theorem 1]. Supposons que $\boldsymbol{B}$ est monotone. On remarque que $\forall j = 1, \ldots n-1$, $\boldsymbol{\delta}_j \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{\delta}_{j+1}$. Donc $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{\delta}_j = \boldsymbol{B}(\cdot, j) \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{\delta}_{j+1} = \boldsymbol{B}(\cdot, j+1)$.

Réciproquement, supposons (20) vraie. Par transitivité de $\leq_{st}^{\oplus}$, le COROLLAIRE 3.1 et l'idempotence de $\oplus$, (20) implique :

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 1) & = \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 1) \\ \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 2) & = \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 1) \oplus \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 2) \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n) & = \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n) \end{cases} \tag{21a}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 1) & = \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 1) \oplus \cdots \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n) \\ \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 2) & = \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, 2) \oplus \cdots \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n) \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n-1) & = \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n-1) \oplus \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n) \\ \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n) & = \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, n). \end{cases} \tag{21b}$$

Soient $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ deux vecteurs de probabilité idempotente tels que $\boldsymbol{p} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{q}$. Il vient :

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{p} & = \oplus_{j=1}^{n} \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, j) \otimes p_j & \\ & = \oplus_{j=1}^{n} \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, j) \otimes (\oplus_{k=j}^{n} p_k) & \text{par (21a) et distributivité} \\ & \leq \oplus_{j=1}^{n} \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}(\cdot, j) \otimes (\oplus_{k=j}^{n} q_k) & \otimes \text{ croissante et } \oplus_{k=j}^{n} p_k \leq \oplus_{k=j}^{n} q_k \\ & = \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{q} & . \end{array}$$

De manière similaire en utilisant (21b) on démontre que $\boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{q} \leq \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{p}$. Et le résultat est prouvé. □

4.2 Encadrement d'une chaîne de Bellman

Soient $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{B}'$ deux noyaux de Bellman de taille n, $n \geq 1$. Nous étendons la relation $\leq_{st}^{\oplus}$ aux matrices de la manière suivante :

$$\boldsymbol{B} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B}' \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall j = 1, \ldots, n, \boldsymbol{B}(\cdot, j) \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B}'(\cdot, j). \tag{22}$$

Ceci se réécrit matriciellement :

$$\boldsymbol{B} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B}' \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B} & \leq \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}' & \leq \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{B} & \leq \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B}' & \leq \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{B}. \end{array} \right.$$

Nous énonçons alors le théorème de comparaison de chaînes de Bellman ci-après. Sa démonstration est très semblable à e.g. celle de [10, Theorem 2] et ne sera pas développée ici. Dans le cas de [10, Theorem 2] le préordre manipulé est généré uniquement par la matrice $\boldsymbol{K}_n$ alors qu'ici le préordre étudié est généré par le couplage croissant qui repose sur les matrices $\boldsymbol{K}_n$ et $\boldsymbol{K}_n^T$.

THEOREME 4.2. *Soient $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}'$ et $\boldsymbol{B}''$ trois noyaux de Bellman. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i). $\boldsymbol{B}' \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B}''$
(ii). $\boldsymbol{B}'$ et $\boldsymbol{B}''$ sont monotones,
alors

$$\forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'' \in P(n), \boldsymbol{p}' \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{p} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{p}'' \Rightarrow \boldsymbol{B}' \otimes \boldsymbol{p}' \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{p} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B}'' \otimes \boldsymbol{p}''.$$

A partir du THEOREME 3.2 nous construisons la borne inférieure de $\boldsymbol{B}$ monotone et optimale au sens de $\leq_{st}^{\oplus}$ comme suit :

$$\underline{\boldsymbol{B}}(\cdot, n) := \boldsymbol{B}(\cdot, n),\ \underline{\boldsymbol{B}}(\cdot, j) := \boldsymbol{B}(\cdot, j) \wedge_{st} \underline{\boldsymbol{B}}(\cdot, j+1), j = n-1, \ldots, 1. \tag{23}$$

Nous construisons la borne supérieure de $\boldsymbol{B}$ monotone et optimale au sens de $\leq_{st}^{\oplus}$ comme suit :

$$\overline{\boldsymbol{B}}(\cdot, 1) := \boldsymbol{B}(\cdot, 1),\ \overline{\boldsymbol{B}}(\cdot, j) := \boldsymbol{B}(\cdot, j) \vee_{st} \overline{\boldsymbol{B}}(\cdot, j-1), j = 2, \ldots, n. \tag{24}$$

Où, rappelons-le, $\wedge_{st}$ et $\vee_{st}$ sont définis par (17) et (18), respectivement.

Notons que dans le cas du semi-anneau $\mathbb{M}$, la construction d'opérateurs $\leq_{st}$-monotones optimaux bornants est connue au moins depuis [9].

4.3 Bornes et réduction de l'espace d'état

Soient $N, n \geq 1$ avec $N < n$. On considère les ensembles $S := \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$, $\Sigma := \{1, \ldots, I, \ldots, N\}$, ϕ une application surjective croissante de S vers Σ et la $N \times n$-matrice $\boldsymbol{V}$ définie par :

$$\forall I \in \Sigma, \forall j \in S,\ v_{I,j} := 1 \text{ si } \phi(j) = I, 0 \text{ sinon.} \tag{25}$$

L'objectif de cette sous-section est de trouver un encadrement de la suite des $\widehat{\boldsymbol{x}}(k)$ définie par le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{x}(0) & = \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{x}(k+1) & = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x}(k), \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(k) & = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{x}(k), \end{array}\right. \tag{26}$$

sans calculer explicitement la suite des $\boldsymbol{x}(k)$.

DEFINITION 4.1 (Matrice $\boldsymbol{V}$-agrégeable, [8])**.** *Une matrice $\boldsymbol{B} \in \mathbb{B}^{n,n}$ est dite $\boldsymbol{V}$-agrégeable si :*

$$\exists \widehat{\boldsymbol{B}} \in \mathbb{B}^{N,N} : \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{B} = \widehat{\boldsymbol{B}} \otimes \boldsymbol{V}$$

ou de manière équivalente :

$$\forall I, J \in \Sigma, \exists \widehat{a}_{I,J}, \forall j \in \phi^{-1}(J), \oplus_{i \in \phi^{-1}(I)} a_{i,j} = \widehat{a}_{I,J}.$$

Notons que dans le semi-anneau $\mathbb{M}$ cette notion est connue pour les chaînes de Markov sous le nom de "strong lumpability" [4].

Si donc $\boldsymbol{B}$ est une matrice $\boldsymbol{V}$-agrégeable la suite des $\widehat{\boldsymbol{x}}(k)$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{ll} \widehat{\boldsymbol{x}}(0) & = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{\beta} \\ \widehat{\boldsymbol{x}}(k+1) & = \widehat{\boldsymbol{B}} \otimes \widehat{\boldsymbol{x}}(k). \end{array}\right.$$

Avec, en remarquant que $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{I}$ (matrice identité) :

$$\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{V}^T. \tag{27}$$

THEOREME 4.3. *Pour tout opérateur/noyau de Bellman $\boldsymbol{B}$ il existe toujours une matrice $\boldsymbol{L}$ et une matrice $\boldsymbol{U}$ $\boldsymbol{V}$-agrégeables telles que*

$$\boldsymbol{L} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{B} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{U}. \tag{28}$$

Preuve. L'inégalité (28) est vérifiée pour les matrices $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{U}$ définies par

$$\forall I, J \in \Sigma : \; u_{i,j}^{I,J} := \overline{b}_{i,n_J}^{I,J}, l_{i,j}^{I,J} := \underline{b}_{i,1}^{I,J}, i = 1, \ldots, n_I; j = 1, \ldots, n_J. \tag{29}$$

En rappelant que $\underline{\boldsymbol{B}} = (\underline{b}_{i,j})$ et $\overline{\boldsymbol{B}} = (\overline{b}_{i,j})$ sont définies par (23) et (24), respectivement.
La notation $b_{l,k}^{I,J}$ fait référence au coefficient b_{m_I-1+l, m_J-1+k} de la matrice $\boldsymbol{B} \in \mathbb{B}^{n,n}$. Pour tout $J \in \Sigma$, m_J est le plus petit élément de l'agrégat $\phi^{-1}(J)$ de cardinal n_J. □

Du point de vue applicatif le résultat suivant est alors important.

COROLLAIRE 4.1. *La suite des $\widehat{\boldsymbol{x}}(k)$ définie par (26) vérifie :*

$$\forall k, \; \widehat{\boldsymbol{l}}(k) \leq_{st}^{\oplus} \widehat{\boldsymbol{x}}(k) \leq_{st}^{\oplus} \widehat{\boldsymbol{u}}(k) \; \textit{(préordre } \leq_{st}^{\oplus} \textit{sur } \Sigma, \textit{ ici)}$$

où :

$$\left\{\begin{array}{ll} \widehat{\boldsymbol{l}}(0) & = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{\beta}, \\ \widehat{\boldsymbol{l}}(k+1) & = \widehat{\boldsymbol{L}} \otimes \widehat{\boldsymbol{l}}(k) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} \widehat{\boldsymbol{u}}(0) & = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{\beta}, \\ \widehat{\boldsymbol{u}}(k+1) & = \widehat{\boldsymbol{U}} \otimes \widehat{\boldsymbol{u}}(k) \end{array}\right.$$

avec :

$$\widehat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{V}^T, \; \widehat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V}^T$$

en rappelant que les matrices $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{U}$ sont définies par (29).

Preuve. Comme ϕ est croissante, la structure de la matrice $\boldsymbol{V}$ induit les égalités suivantes :

$$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{K}_N \otimes \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{K}_n^T = \boldsymbol{K}_N^T \otimes \boldsymbol{V}.$$

Où, rappelons-le, $\boldsymbol{K}_n$ [$\boldsymbol{K}_N$] désigne la $n \times n$-matrice [$N \times N$-matrice] définie par (15).
Le reste de la preuve se déduit du THEOREME 4.2 avec $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{\beta}$, du THEOREME 4.3, de la transitivité de $\leq$ et de la croissance de $\otimes$. $\square$

4.4 Petit example illustratif

On considère les ensembles $S = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\Sigma = \{1, 2\}$, i.e. $n = 4, N = 2$, l'application surjective croissante $\phi : S \mapsto \Sigma$ telle que $\phi(1) = \phi(2) = 1$ et $\phi(3) = \phi(4) = 2$. La 2×4-matrice $\boldsymbol{V}$ définie par (25) est :

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons alors l'opérateur de Bellman suivant :

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0.1 & 0.4 & 1 & 0.1 \\ 0.3 & 1 & 0.7 & 1 \\ \hline 1 & 0.8 & 0.4 & 0.8 \\ 0.2 & 1 & 0.5 & 0.6 \end{array}\right).$$

En utilisant les formules (23) et (24) on obtient les bornes monotones optimales :

$$\underline{\boldsymbol{B}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 1 \\ \hline 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.6 \end{array}\right), \overline{\boldsymbol{B}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

A partir de ces bornes nous obtenons les matrices $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{U}$ $\boldsymbol{V}$-agrégeables par la formule (29) :

$$\boldsymbol{L} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ \hline 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right), \boldsymbol{U} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Les matrices agrégées sont alors :

$$\widehat{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \widehat{\boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partons, par exemple, de $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\beta} = (0.4, 0.3, 0.7, 1)^T$. Nous obtenons les bornes suivantes sur la suite des $\widehat{\boldsymbol{x}}(k)$ (voir Table 1).

5 Conclusion

Dans cet article nous avons étudié la CNS d'existence de couplage croissant de deux vecteurs de probabilité idempotente. Cette CNS induit un préordre entre ces deux vecteurs. Ce préordre

k	$\widehat{\boldsymbol{l}}^T(k)$	$\widehat{\boldsymbol{x}}^T(k)$	$\widehat{\boldsymbol{u}}^T(k)$
0	$(0.4, 1)^T$	$(0.4, 1)^T$	$(0.4, 1)^T$
1	$(1, 0.5)^T$	$(1, 0.8)^T$	$(0, 1)^T$
2	$(1, 0.5)^T$	$(1, 1)^T$	$(0, 1)^T$
3	$(1, 0.5)^T$	$(1, 1)^T$	$(0, 1)^T$

Table 1: Bornes sur la dynamique agrégée

nous a permis d'établir des résultats de comparaison de marginales de dimension un pour une chaîne de Bellman définie par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(0) & = \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{x}(k+1) & = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x}(k). \end{cases}$$

Autrement dit, nous avons travaillé dans l'espace de Krylov :

$$\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{B}^{\otimes 2} \otimes \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{B}^{\otimes n} \otimes \boldsymbol{\beta}, \ldots\}$$

où pour $n \geq 1$, $\boldsymbol{B}^{\otimes n} := \boldsymbol{B} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{B}$ (n fois).

En travaillant dans le semi-anneau $\mathbb{M}$ et en remplaçant le préordre $\leq_{st}^{\oplus}$ par l'ordre partiel $\leq_{st}$ le lecteur retrouve dans la section 4 tous les résultats connus de la comparaison des chaînes de Markov au sens de l'ordre fort $\leq_{st}$. La différence se fait au niveau des preuves des résultats. Et de la définition des opérateurs monotones optimaux.

Pour finir, signalons que ce préordre $\leq_{st}^{\oplus}$ permettrait d'obtenir des comparaisons trajectorielles, i.e. dans l'espace :

$$\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{B}^{\times n} \times \boldsymbol{\beta}, \ldots\}$$

où $\forall n \geq 1$, $\forall (i_0, \ldots, i_n) \in S^{n+1}$:

$$\boldsymbol{B}^{\times n} \times \boldsymbol{\beta}(i_0, \ldots, i_n) := b_{i_n, i_{n-1}} \cdots b_{i_1, i_0} \beta_{i_0}.$$

Ce sujet fait l'objet d'un travail en cours.

References

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J-P. Quadrat. *Synchronization and Linearity.* John Wiley and Sons, 1992.

[2] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application.* Academic Press, 1980.

[3] M. Fréchet. Sur les Tableaux dont les Marges et des Bornes sont Données. *Revue Inst. Int. de Stat.*, 28(1/2), 1960. (10-32).

[4] J.G. Kemeny and J. L. Snell. *Finite Markov Chains.* Princeton, 1960.

[5] J. Ledoux and L. Truffet. Comparison and Aggregation of Max-plus Linear Systems. *Lin. Alg. Appli.*, 378(1), Feb. 2004. (245-272).

[6] A. Múller and D. Stoyan. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* J. Wiley and Sons, 2002.

[7] J. P. Quadrat. Théorèmes Asymptotiques en Programmation Dynamique. *CRAS*, 311, 1990. (745-748).

[8] J. P. Quadrat and Max-Plus WG. Min-Plus Linearity and Statistical Mechanics. *Markov Processes and Related Fields*, 3(4), 1997. (565-597).

[9] M. Trémolières, J.M Vincent, and B. Plateau. Determination of the Optimal Stochastic Upper Bound of a Markovian Generator. Technical report, LGI-IMAG, Grenoble-FRANCE, November 1992. RR 906-I-.

[10] L. Truffet. Some Ideas to Compare Bellman Chains. *Kybernetika -Special issue on max-plus algebra-*, 39(2), 2003. (155-163).

[11] C. Villani. *Optimal Transport, Old and New.* Springer-Verlag, 2009.

A Démonstration du THEOREME 3.2 p. 7

Borne inférieure :
En écrivant les contraintes $\boldsymbol{r} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{r} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{q}$ il vient :

$$\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q}, \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q} \leq \boldsymbol{K}_n^T \otimes \boldsymbol{r}. \tag{30b}$$

Le plus grand vecteur satisfaisant la contrainte (30a) est trivialement $\boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q}$. Comme $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ sont des vecteurs de probabilité idempotente nous en déduisons que, par définition de $\boldsymbol{K}_n$, $\boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q}$ est un vecteur de probabilité idempotente tel que : $(\boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q})_1 = 1$. Cette dernière égalité nous permet d'affirmer que ce vecteur vérifie également la contrainte (30b) qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} p_1 \oplus q_1 & \leq & r_1 \\ p_2 \oplus q_2 & \leq & r_1 \oplus r_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n-1} \oplus q_{n-1} & \leq & r_1 \oplus \cdots \oplus r_{n-1} \\ p_n \oplus q_n & \leq & r_1 \oplus \cdots \oplus r_n. \end{array} \right.$$

Et donc $\boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{K}_n \otimes \boldsymbol{q}$ est la borne inférieure de $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ au sens du préordre $\leq_{st}^{\oplus}$.

Borne supérieure :
Ecrivons les contraintes $\boldsymbol{p} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{q} \leq_{st}^{\oplus} \boldsymbol{r}$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{lll} r_1 \oplus \cdots \oplus r_n & \geq & p_1 \oplus q_1 \\ r_2 \oplus \cdots \oplus r_n & \geq & p_2 \oplus q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n-1} \oplus r_n & \geq & p_{n-1} \oplus q_{n-1} \\ r_n & \geq & p_n \oplus q_n \end{array} \right. \tag{31a}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} r_1 & \leq & p_1 \wedge q_1 \\ r_2 & \leq & (p_1 \oplus p_2) \wedge (q_1 \oplus q_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n-1} & \leq & (p_1 \oplus \cdots \oplus p_{n-1}) \wedge (q_1 \oplus \cdots \oplus q_{n-1}) \\ r_n & \leq & (p_1 \oplus \cdots \oplus p_n) \wedge (q_1 \oplus \cdots \oplus q_n) = 1. \end{array} \right. \tag{31b}$$

Définissons $\overline{\boldsymbol{r}} := \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q} \ominus (\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{q})$ où $\boldsymbol{M}_n$ est définie par (19), i.e. :

$$\overline{r}_i := p_i \oplus q_i \ominus \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i = n \\ (p_{i+1} \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_{i+1} \oplus \cdots \oplus q_n) & \text{si } i < n. \end{array} \right.$$

On remarque (par récurrence sur k, $k = n, \ldots, 1$ et en utilisant le fait que $a \geq b \oplus c \Leftrightarrow a \geq b$ et $a \geq c$) que le système de contraintes (31a) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{lll} r_1 \oplus \cdots \oplus r_n & \geq & (p_1 \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_1 \oplus \cdots \oplus q_n) \\ r_2 \oplus \cdots \oplus r_n & \geq & (p_2 \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_2 \oplus \cdots \oplus q_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n-1} \oplus r_n & \geq & p_{n-1} \oplus p_n \oplus q_{n-1} \oplus q_n \\ r_n & \geq & p_n \oplus q_n \end{array} \right. \tag{32}$$

Par définition de $\ominus$ et de sa propriété (7), l'associativité de $\oplus$ on démontre aisément par récurrence sur k, $k = n, \ldots, 1$ que :

$$\overline{r}_k \oplus \cdots \oplus \overline{r}_n = (p_k \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_k \oplus \cdots \oplus q_n).$$

Comme $\ominus$ est décroissante (i.e. $a \leq b \Rightarrow x \ominus a \geq x \ominus b$, $\forall x$) $\overline{\boldsymbol{r}}$ est la solution optimale de (31a).

Il reste à montrer que $\overline{\boldsymbol{r}}$ vérifie (31b). Par l'absurde, supposons $\exists k$ tel que $\overline{r}_k > (p_1 \oplus \cdots \oplus p_k) \wedge (q_1 \oplus \cdots \oplus q_k)$. Par définition de $\ominus$ nous avons deux cas à étudier.

Cas 1. Si $p_k \oplus q_k \leq (p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_{k+1} \oplus \cdots \oplus q_n)$ alors $\overline{r}_k = 0$ et l'inégalité stricte $0 > (p_1 \oplus \cdots \oplus p_k) \wedge (q_1 \oplus \cdots \oplus q_k)$ est impossible car les p_i et q_i sont ≥ 0.

Cas 2. Si $p_k \oplus q_k > (p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_{k+1} \oplus \cdots \oplus q_n)$ alors $\overline{r}_k = p_k \oplus q_k$. Ces inégalités strictes entrainent :

$$p_k \oplus q_k > ((p_1 \oplus \cdots \oplus p_k) \wedge (q_1 \oplus \cdots \oplus q_k)) \oplus (p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_{k+1} \oplus \cdots \oplus q_n).$$

Or, par distritibutivité du treillis $([0, \infty], \leq)$ on a :

$$\begin{array}{ll} ((p_1 \oplus \cdots \oplus p_k) \wedge (q_1 \oplus \cdots \oplus q_k)) \oplus (p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_{k+1} \oplus \cdots \oplus q_n) & = \\ (p_1 \oplus \cdots \oplus p_n \oplus q_{k+1} \oplus \cdots \oplus q_n) \wedge (p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n \oplus q_1 \oplus \cdots \oplus q_n) & = \\ (1 \oplus q_{k+1} \oplus \cdots \oplus q_n) \wedge (p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n \oplus 1) & = \\ 1 & . \end{array}$$

Ce qui implique :

$$p_k \oplus q_k > 1.$$

Cette inégalité stricte est alors impossible car $p_k, q_k \in [0, 1]$.